Correction du sujet Math 1(Maths-Physique): Session: Juin 2003

Exercice

1) a) La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$, paire et $2\pi-$périodique, donc $b_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. 1,5

De plus, un calcul direct donne $a_0 = \frac{\pi^2}{6}$ et $a_n = -\frac{1}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. 0,5 + 2

Donc la série de Fourier de g est donnée par:

5

$$Sg(x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n\geq 1} \frac{\cos nx}{n^2}, \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}.$$ 1

---

b) D'aprés le théorème de Dirichlet, on a pour $x \in [0, 2\pi]$

$$g(x) = \frac{\pi}{2}x - \frac{x^2}{4} = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n\geq 1} \frac{\cos nx}{n^2}.$$ 1,5

$g(x) = 1 - 2\sin^2(x)$

Ce qui donne que pour tout $x \in [0, \pi]$,

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{n^2} = g(2x) = (x\pi - x)$

4

$$\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n\geq 1} \frac{1 - 2\sin^2 nx}{n^2} = x(\pi - x).$$ 1

En remarquant qu' en prenant $x = 0$, on obtient $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ et par conséquent:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin^2 nx}{n^2} = \frac{x(\pi - x)}{2}, \forall x \in [0, \pi].$$ 1,5

---

2) D'aprés la question précédente, on a pour $x \in]0, \pi]$,

3

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin^2 nx}{n^2 x} = \frac{\pi - x}{2} \leq \frac{\pi}{2}.$$ 1

Soit $x > 0$, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x \in \left]k\pi, (k+1)\pi\right]$. Donc on a:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin^2 nx}{n^2 x} \leq \sum_{n\geq 1} \frac{\sin^2 n(x-k\pi)}{n^2(x-k\pi)} \leq \frac{\pi}{2}.$$ 2

---

3) a) Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tel que $p < q$ et $x > 0$, alors d'aprés la question précédente on a:

1,5 $$\sum_{n=p}^{q} |u_n(x)| \leq \sup_{n\geq p} |\alpha_n| . \sum_{n=p}^{q} \frac{\sin^2 nx}{n^2 x} \leq \frac{\pi}{2} . \sup_{n\geq p} |\alpha_n| .$$

---

b) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$, alors $\forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq p$, on a $|\alpha_n| \leq \varepsilon$.
D'où pour $q > p$, on a:

$$\sum_{n=p}^{q} |u_n(x)| \leq \frac{\pi}{2} . \sup_{n\geq p} |\alpha_n| \leq \frac{\pi}{2} . \varepsilon.$$

4 Ce qui montre que la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge uniformément vers une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$.

Maintenant, en remarquant que la fonction u_n est paire , on conclut que la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge vers une fonction continue sur $\mathbb{R}$. 1

Problème

Soit $E = \{f \in C_b([0, +\infty[, \mathbb{R}) : \forall x > 0; \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{tf(t)}{x^2+t^2} dt \text{ converge}\}$.

Partie I

1) Soients $\varphi(t) = \dfrac{t}{1+t^2}$, $t \geq 0$ et $\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq e, \\ \dfrac{1}{Logt} & \text{si } t > e. \end{cases}$

a) On a $\forall t \geq 0$, $0 \leq \varphi(t) \leq \dfrac{1}{2}$ et φ est continue sur $[0, +\infty[$.

$$\text{De plus}\quad 0 \le \int_0^{+\infty} \frac{t\varphi(t)}{x^2+t^2}dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)(x^2+t^2)}dt$$
$$\le \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)}dt = \frac{\pi}{2} < +\infty.$$ 1,5

Donc $\varphi \in E$.

On a pour $x > 0$ et $x \neq 1$: $u = t^2$

$$\frac{u}{(1+u)(x^2+u)} = \frac{1}{(1-x^2)}\frac{1}{(1+u)} + \frac{x^2}{(x^2-1)}\frac{1}{(x^2+u)}.$$ 1,5

Ce qui donne: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\varphi(t)}{(x^2+t^2)(1+t^2)}dt = \frac{\pi}{2(x+1)}$; si $x \neq 1$. 1

(5,5)

D'autre part on a : $\displaystyle\frac{t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{(1+t^2)} - \frac{1}{(1+t^2)^2}$. 0,5

D'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt = \frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2}dt.$

En posant $t = tg\theta$, on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta = \frac{\pi}{4}$. 1

Ce qui donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt = \frac{\pi}{4}$.

En somme, on a: $\forall x > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\varphi(t)}{x^2+t^2}dt = \frac{\pi}{2(x+1)}$.

(1,5)

b) Comme $\forall x > 0$, $\displaystyle\frac{t\psi(t)}{x^2+t^2} \sim \frac{1}{tLogt}$ (quand $t \to +\infty$) et $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{tLogt}dt = +\infty$, alors $\psi \notin E$.

---

2) Les fonctions e^{-t}, $\sin t$ et $\cos t$ sont continues et bornées sur $[0, +\infty[$.
De plus on a: $\forall x > 0$

(4)

- $\displaystyle\frac{te^{-t}}{x^2+t^2} \sim \frac{e^{-t}}{t}$ $(t \longrightarrow +\infty)$, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{x^2+t^2}dt$ converge. 1
  Ce qui montre que $t \longmapsto e^{-t}$ est dans E.
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\sin t}{x^2+t^2}dt = \left[\frac{-t\cos t}{x^2+t^2}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2}\cos t\, dt.$ 1,5
  $\displaystyle\Longrightarrow \left|\int_0^{+\infty} \frac{t\sin t}{x^2+t^2}dt\right| \le \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+t^2}dt < +\infty.$

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\cos t}{x^2+t^2}dt = \left[\frac{t\sin t}{x^2+t^2}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2}\sin t\, dt.$ 1,5

$\displaystyle\Longrightarrow \left|\int_0^{+\infty} \frac{t\cos t}{x^2+t^2}dt\right| \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+t^2}dt < +\infty.$

Ainsi les fonctions $\sin t$ et $\cos t$ sont dans E.

---

3) Soit f une fonction réelle continue sur $[0,+\infty[$ telle que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = l \in \mathbb{R}$.

1,5

a) $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = l \Longrightarrow \exists a > 0$ tq $\forall t \geq a,\ |f(t)| \leq |l| + 1.$ 1

Comme f est continue sur $[0,+\infty[\Longrightarrow \max\limits_{0\leq t\leq a} |f(t)|$ existe et est fini. 0,5

Donc $\forall t \geq 0,\ |f(t)| \leq \max\limits_{0\leq t\leq a} |f(t)| + |l| + 1.$

2,5

b) • Supposons que $l > 0$, alors $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall t \geq \alpha;\ f(t) \geq \frac{l}{2}.$

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{tf(t)}{x^2+t^2}dt \geq \int_0^{\alpha} \frac{tf(t)}{x^2+t^2}dt + \frac{l}{2}\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{t}{x^2+t^2}dt = +\infty.$ 1,5

Donc $f \notin E$.

- Si $l < 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty}(-f(t)) = -l > 0 \Longrightarrow -f \notin E \Longrightarrow f \notin E.$ 1

1,5

c) Pour le cas $l = 0$, on a:

- $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0$ et $\varphi \in E$. 0,75
- $\lim\limits_{t\to+\infty} \psi(t) = 0$ et $\psi \notin E$. 0,75

$*$ Dans la suite pour $f \in E$ et $x > 0$, on pose $Tf(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{tf(t)}{x^2+t^2}dt$.

4) Soit $f \in E$, positive sur $[0,+\infty[$.

1

a) Si $0 < x \leq y \Longrightarrow \forall t \geq 0;\ x^2+t^2 \leq y^2+t^2$

$$\Longrightarrow \; 0 \leq \frac{tf(t)}{y^2+t^2} \leq \frac{tf(t)}{x^2+t^2} \Longrightarrow Tf(y) \leq Tf(x).$$

Donc Tf est décroissante sur $]0,+\infty[$.

---

b) Puisque $x \longmapsto Tf(x)$ est décroissante sur $]0,+\infty[$

$\Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} Tf(x)$ existe dans $[0,+\infty]$. 0,5

(2) D'après le théorème de convergence monotone, on a:

$$\lim_{x\to 0^+} Tf(x) = \lim_{n\to+\infty} Tf(\tfrac{1}{n}) = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} \frac{tf(t)}{\frac{1}{n^2}+t^2}dt = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt \leq +\infty.$$ 1,5

---

c) De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} Tf(x)$ existe et est positive. 0,5

D'après le théorème de convergence dominée, on a:

(2,5)

$$\lim_{x\to 0^+} Tf(x) = \lim_{n\to+\infty} Tf(n) = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} \frac{tf(t)}{n^2+t^2}dt = 0.$$ 1

(car $0 \leq \dfrac{tf(t)}{n^2+t^2} \leq \dfrac{tf(t)}{1+t^2}$ $\forall n \geq 1, \forall t \geq 0$ et $Tf(1) < \infty$). 1

---

5) Soit $f \in E$. On suppose que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt$ converge et qu'il existe deux constantes $c > 0$ et $\alpha > 0$ telles que pour tout $t \geq 0$; $|f(t)| \leq c\, t^\alpha$.

a) On a $\forall x > 0$;

(2,5)

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{tf(t)}{x^2+t^2}dt - \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt &= \int_0^{+\infty} f(t)\left[\frac{t}{x^2+t^2} - \frac{1}{t}\right] dt \\ &= -x^2 \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{(x^2+t^2)t}dt \quad 1 \\ &= -\int_0^{+\infty} \frac{f(rx)}{r(1+r^2)}dr. \quad 1{,}5\end{aligned}$$

(On pose $t = rx \Longrightarrow dt = xdr$)

---

b) $$\left|\int_0^{+\infty} \frac{tf(t)}{x^2+t^2}dt - \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt\right| \leq c \int_0^{+\infty} \frac{r^\alpha x^\alpha}{r(1+r^2)}dr \quad 1{,}5$$

(2,5)

$$= c\, x^\alpha \int_0^{+\infty} \frac{r^{\alpha-1}}{(1+r^2)}dr \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0. \quad 1$$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} Tf(x) = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt.$

---

6) a) Soient $x > 0$ et $t \geq 0$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right)\right| = \left|\frac{-2xt}{(x^2+t^2)^2}\right| \leq \frac{2xt}{x^2+t^2}\frac{1}{x^2+t^2} \leq \frac{1}{x^2+t^2},$$ 1,5

(car $0 \leq \dfrac{2xt}{x^2+t^2} \leq 1$).

3,5 D'autre part,

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right)\right| = \frac{2t\,|3x^2-t^2|}{(x^2+t^2)^3} \leq \frac{6t(x^2+t^2)}{(x^2+t^2)^3}$$ 2

Donc $\forall t \geq 0$, $\forall x > 0$, $\left|\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dfrac{t}{x^2+t^2}\right)\right| \leq \dfrac{6t}{(x^2+t^2)^2}$.

---

b) Soit $0 < a \leq x \leq b < +\infty$. Alors pour $t \geq 0$ et $f \in E$, on a:

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right)\right| \leq \frac{1}{a^2+t^2} \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right)\right| \leq \frac{6t}{(a^2+t^2)^2}$$ 2

4 et $t \longmapsto \dfrac{|f(t)|}{a^2+t^2}$; $t \longmapsto \dfrac{t\,|f(t)|}{(a^2+t^2)^2}$ sont intégrables sur $[0, +\infty[$.

Donc $\forall f \in E$, la fonction Tf est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et on a pour tout $x > 0$;

$$(Tf)'(x) = -2x\int_0^{+\infty}\frac{tf(t)}{(x^2+t^2)^2}dt \quad \text{et} \quad (Tf)''(x) = 2\int_0^{+\infty}\frac{t(3x^2-t^2)}{(x^2+t^2)^3}f(t)dt.$$ 2

---

c) Soit $M = \sup\limits_{t\geq 0}|f(t)|$. On a pour $x > 0$:

3

$$|(Tf)'(x)| \leq 2xM\int_0^{+\infty}\frac{t}{(x^2+t^2)^2}dt = xM\left[\frac{-1}{x^2+t^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{M}{x}.$$ 1,5

$$|(Tf)''(x)| \leq 6M\int_0^{+\infty}\frac{t}{(x^2+t^2)^2}dt = 3M\left[\frac{-1}{x^2+t^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{3M}{x^2}.$$ 1,5

---

7) a) Il est facile de vérifier que $\forall (x,t) \neq (0,0)$;

2

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right) = \frac{2t(t^2-3x^2)}{(x^2+t^2)^3} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right).$$

b) Soit $f \in E$ telle que f soit de classe C^2 sur $[0,+\infty[$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{f'(t)}{t} = 0$.

Soit $x > 0$, on a:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right) f(t)dt = \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right) f(t)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right) f'(t)dt$$

$$= \left[\frac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2} f(t)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right) f'(t)dt$$

(4) $$= -\frac{f(0)}{x^2} - \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right) f'(t)dt \;;\; \left(\lim_{t\to+\infty} \frac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2} f(t) = 0 \text{ , car } f \text{ est bornée}\right)$$ 2

$$= -\frac{f(0)}{x^2} - \left[\frac{t}{x^2+t^2} f'(t)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{t}{x^2+t^2} f''(t)dt$$

$$= -\frac{f(0)}{x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{t}{x^2+t^2} f''(t)dt \;;\; \left(\text{car } \left|\frac{t}{x^2+t^2} f'(t)\right| \le \frac{|f'(t)|}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0\right).$$ 2

Donc $\forall x > 0$;

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right) f(t)dt = -\frac{f(0)}{x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{t}{x^2+t^2} f''(t)dt.$$

(1,5) c) Comme $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\dfrac{t}{x^2+t^2}\right) = -\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dfrac{t}{x^2+t^2}\right)$, alors

$\forall x > 0;\; (Tf)''(x) = \dfrac{f(0)}{x^2} - \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{t}{x^2+t^2} f''(t)dt.$

Partie II

1) On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$. Soit $f(t) = \sin t$. On pose pour $x > 0$,

$$v(x) = T(f)(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t \sin t}{x^2+t^2} dt .$$

a) On a pour $x > 0$:

(1,5) $$v(x) = \left[\frac{-t\cos t}{x^2+t^2}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2} \cos t \; dt = \int_0^{+\infty} \frac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2} \cos t \; dt.$$

---

b) On a $\forall x > 0$,

(1,5) $$|v(x)| \le \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+t^2)} dt = \frac{\pi}{2x}.$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = 0$.

(2)

c) Puisque $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge et $|\sin t| \le t$, $\forall t \ge 0$. Il s'ensuit d'après (I-5-b), que 1

$\lim\limits_{x\to 0^+} v(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$. 1

(2,5)

d) La fonction $f(t) = \sin t$, est dans E, de classe C^2 sur $[0, +\infty[$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{f'(t)}{t} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\cos t}{t} = 0$. Alors d'après (I-7-c), on a pour tout $x > 0$: 1

$(Tf)''(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t}{x^2+t^2} f''(t)dt.$ 1

C'est à dire

$v''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{x^2+t^2} \sin t \, dt.$ 0,5

Donc $\forall x > 0$, $v''(x) - v(x) = 0$.

---

(2)

e) $\forall x > 0$; $v(x) = ae^x + be^{-x}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. 1

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = 0 \Longrightarrow a = 0$ 0,5

et $\lim\limits_{x\to 0^+} v(x) = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow b = \frac{\pi}{2}$. 0,5

D'où $\forall x > 0$, $v(x) = \frac{\pi}{2} e^{-x}$.

---

2) On pose $w(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{x^2+t^2} e^{-t} dt$, pour $x > 0$.

(1,5)

a) Soit $f(t) = e^{-t}$, $t \ge 0$. Alors $f \in E$ et f est positive. 1

Donc d'après (I-4-c); $\lim\limits_{x\to+\infty} Tf(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} w(x) = 0$. 0,5

(2,5)

b) La fonction $f(t) = e^{-t}$, $t \ge 0$, est dans E, de classe C^2 sur $[0, +\infty[$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{f'(t)}{t} = 0$. Donc d'après (I-7-c); 1

$(Tf)''(x) = \frac{1}{x^2} - \int_0^{+\infty} \frac{t}{x^2+t^2} f''(t)dt.$, $\forall x > 0$. 1

C'est à dire: $w''(x) + w(x) = \frac{1}{x^2}$, $\forall x > 0$. 0,5

c) Comme pour tout $t > 0$, on a $w''(t) + w(t) = \frac{1}{t^2}$, alors pour tout $x > 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_x^{+\infty} w(t)dt &= \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt - \int_x^{+\infty} w''(t)dt \\ &= \frac{1}{x} + w'(x) \quad (\text{car } \lim_{\xi \to +\infty} w'(\xi) = 0 \text{ d'après I-6-c}) \end{aligned}$$

(2,5) 1

1,5

C'est à dire $w'(x) = -\frac{1}{x} + \int_x^{+\infty} w(t)dt.$

d) La fonction w vérifie $(*)$ $\begin{cases} w''(x) + w(x) = \frac{1}{x^2}, & \forall x > 0 \\ \lim_{x \to +\infty} w(x) = 0. \end{cases}$

Soit u une autre fonction sur $]0, +\infty[$ vérifiant: $\begin{cases} u''(x) + u(x) = \frac{1}{x^2}, & \forall x > 0 \\ \lim_{x \to +\infty} u(x) = 0, \end{cases}$

alors $(u - w) := \rho$ vérifie:

(2)

$$\begin{cases} \rho''(x) + \rho(x) = 0, & \forall x > 0 \\ \lim_{x \to +\infty} \rho(x) = 0, \end{cases}$$

1

$$\Longrightarrow \begin{cases} \rho(x) = a\cos x + b\sin x, & \forall x > 0 \\ \lim_{x \to +\infty} \rho(x) = 0, \end{cases}$$

$\Longrightarrow \rho(x) = 0; \ \forall x > 0.$ 1

C'est à dire $u = w$.

Donc w est l'unique fonction sur $]0, +\infty[$ vérifiant $(*)$.

e) On a pour tout $x > 0$;

(2)

$$0 < w(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{x^2 + t^2} e^{-t} dt \le \frac{1}{x^2}\left(\int_0^{+\infty} te^{-t}dt\right) = \frac{1}{x^2}.$$

1,5

Ce qui donne: $\forall x > 0$, $w''(x) = \frac{1}{x^2} - w(x) \ge 0$. 0,5

C'est à dire que w est convexe sur $]0, +\infty[$.

3) a) On a pour $x > 0$;

$$\begin{aligned}
0 \le 1 - x^2 w(x) &= \int_0^{+\infty} te^{-t}dt - x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t}{x^2+t^2} e^{-t}dt \\
&= \int_0^{+\infty} te^{-t}(1 - \frac{x^2}{x^2+t^2})dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{x^2+t^2} e^{-t}dt \\
&\le \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t}dt = \frac{\Gamma(4)}{x^2} = \frac{6}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

2,5

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 w(x) = 1$.

---

b) Pour $x > 0$, on a

$$\begin{aligned}
w(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{t}{x^2+t^2} e^{-t}dt \\
&= \left[\frac{e^{-t}}{2} Log(x^2+t^2)\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t} Log(x^2+t^2)dt \\
&= -Logx + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t} Log(x^2+t^2)dt.
\end{aligned}$$

2

---

c) i) On a pour $0 < x < 1$;

$$\begin{aligned}
\left|\frac{w(x)}{Logx} + 1\right| &= \left|\frac{1}{2Logx}\int_0^{+\infty} e^{-t} Log(x^2+t^2)dt\right| \\
&\le \frac{1}{2\,|Logx|}\int_0^{+\infty} e^{-t} Log(1+t^2)dt \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

1,5

Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{w(x)}{Logx} = -1$.

ii) Soit $0 < a \le x \le b < +\infty$. Alors pour $t \ge 0$, on a:

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}(e^{-t} Log(x^2+t^2))\right| = \frac{2xe^{-t}}{x^2+t^2} \le \frac{2be^{-t}}{a^2+t^2}$$

2,5

et $t \longmapsto \frac{e^{-t}}{a^2+t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Donc $x \longmapsto F(x) := \int_0^{+\infty} e^{-t} Log(x^2+t^2)dt$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a pour tout $x > 0$;

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2x\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x^2+t^2}dt \\ &= 2\int_0^{+\infty} \frac{e^{-rx}}{1+r^2}dr. \end{aligned}$$ 1,5

(on pose $t = rx \Longrightarrow dt = xdr$).

D'où en utilisant (II-3-b) on déduit que pour tout $x > 0$

$w'(x) = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2}F'(x) = -\dfrac{1}{x} + \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-rx}}{1+r^2}dr.$ 1

---

d) La fonction w est continue. Puisque $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{w(x)}{Log(x)} = -1$

$\Longrightarrow w$ est intégrable sur $]0,1[$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 w(x) = 1 \Longrightarrow w$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. 1

Donc w est intégrable sur $]0,+\infty[$.

2,5 On a d'après (II-2-c) et (II-3-c-(ii))

$\displaystyle\int_x^{+\infty} w(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-rx}}{1+r^2}dr \underset{x\to 0+}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$ (d'après le théorème de convergence monotone). 1,5

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} w(t)dt = \frac{\pi}{2}.$

---

4) On considère la fonction h définie sur $]0,+\infty[$ par:

$h(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{x+t}dt.$

1,5 a) Posons $x + t = u$, alors on a

$$h(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\cos(u-x)}{u}du = \cos x\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}du + \sin x\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}du.$$

---

b) Les fonctions $x \longmapsto \cos x$; $x \longmapsto \sin x$; $x \longmapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}du$ et $x \longmapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}du$ sont de classe C^2 sur $]0,+\infty[$.

Donc h est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ et on a: 0,5

$$h'(x) = -\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du + \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du - \frac{1}{x}$$ 0,5

(2) et

$$h''(x) = -\cos x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du + \frac{1}{x^2}.$$ 0,5

C'est à dire: $\forall x > 0;\ h''(x) + h(x) = \frac{1}{x^2}.$ 0,5

---

c) $\forall x > 0;$

(1)

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{x+t} dt \\ &= \left[\frac{\sin t}{x+t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{(x+t)^2} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{(x+t)^2} dt \end{aligned}$$

---

d) On a $\forall x > 0;\ |h(x)| \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+t)^2} dt = \frac{1}{x}.$ 1

(2) Donc h vérifie: $\begin{cases} h''(x) + h(x) = \frac{1}{x^2}, & \forall x > 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0. \end{cases}$ 0,5

D'après (II-2-d), On a : $h(x) = w(x),\ \forall x > 0.$ 0,5

♣♣♣